

Analysis mit Graphikcomputern am Beispiel der Exponentialfunktion

Herbert Möller (Münster)

1 Vorgeschichte

Während die Entwicklung und Verbreitung von Mikrocomputern in den vergangenen zehn Jahren fast stürmisch verlaufen ist, reifte das Analysiskonzept, über das hier berichtet werden soll, seit fünfzehn Jahren beinahe völlig im Verborgenen. Es wurde 1973 von dem Mathematiker H. Karcher veröffentlicht, um die Auswüchse der "Neuen Mathematik" in der Oberstufe der Gymnasien zurückzudrängen [2]. Später erhielt es wegen der Verwendung des seit mehr als 100 Jahren in der Mathematik gebräuchlichen Begriffs der Lipschitz-Stetigkeit den Namen "Lipschitz-Analysis".

Alle Begriffe und Ergebnisse des Konzepts stellen Verschärfungen der entsprechenden Teile der Cauchy-Analysis dar. Vereinfachungen treten für die Schüler und auch für die Lehrer unter anderem dadurch ein, daß die Begriffe und alle wichtigen Ergebnisse auf kurzen Wegen zugänglich sind und gut veranschaulicht werden können [1], [4].

Nach anfangs sehr heftigen Diskussionen und nach langer Zeit der Nichtbeachtung hat sich die Situation vor etwa zwei Jahren aus folgenden Gründen entscheidend geändert:

i) Das Konzept, das jetzt aufgrund der erreichten Ziele "Elementare Analysis" heißt, ist durch ständige Weiterentwicklung methodisch und didaktisch ausgereift [5], [7].

ii) Nach neunjähriger Bewährung im Schulunterricht erschien 1986 das erste *Schulbuch zur Lipschitz-Analysis* [8]. Es belegt sehr deutlich die zahlreichen Vorteile des Konzepts und umfaßt außerdem nur halb so viele Seiten wie die üblichen Analysisschulbücher. Eine ausführliche Rezension ist in Heft 88/1 des Zentralblatts für Didaktik der Mathematik zu finden.

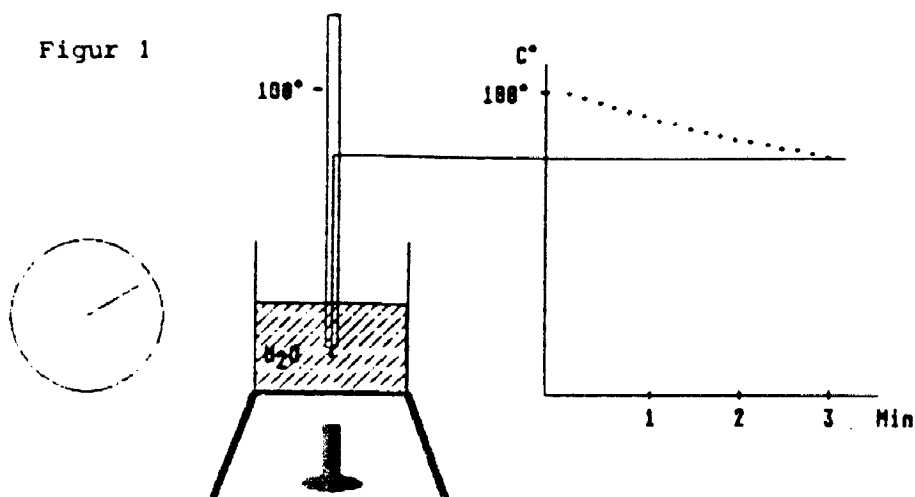
iii) Im Rahmen eines in Münster durchgeführten Forschungsprojekts "Analysis mit Graphikcomputern" [6] stellte es sich heraus, daß die Elementare Analysis einerseits mit ihrem geometrischen, algorithmischen und phänomenologischen Strang in jeweils besonderer Weise sinnvollen Computereinsatz ermöglicht und daß andererseits die theoretische Überlegenheit des Konzepts durch die neuen, leistungsfähigen Graphikcomputer auch eindrucksvoll sichtbar wird.

Da jeder einzelne dieser Punkte den Rahmen eines Vortrags sprengen würde, sollen hier nur die wichtigsten Zusammenhänge zwischen i) und iii) an Hand eines Beispiels dargestellt werden. Um die im folgenden skizzierte Behandlung der Exponentialfunktion mit Graphikcomputern auch im Rahmen des üblichen Analysisunterrichts zu ermöglichen, werden die Besonderheiten der Elementaren Analysis nur in drei Exkursen beschrieben.

2.1 Mathematisierung einer Anwendungssituation

Von den zahlreichen Anwendungen der Exponentialfunktion ist wohl der zeitliche Verlauf der Abkühlung von heißem Wasser am leichtesten zu beobachten. Schüler können ohne großen Aufwand selber messen, der Ablauf ist mit einem Mikrocomputer einfach zu simulieren, und schließlich erlaubt die Durchführung eine der faszinierendsten Anwendungen der Mathematik, nämlich Vorhersagen.

Das Mikrocomputerprogramm (in LOGO oder PASCAL) erlaubt die Eingabe eigener Meßwerte. Wird nicht gemessen, so folgt die Darstellung der Simulation, die neben dem dynamischen Ablauf die Werte einer tatsächlichen Messung als Punkte in einem Temperatur-Zeit-Diagramm wiedergibt (Figur 1).



2.2 Modellbildung

Die Schüler erhalten dann die Möglichkeit, die Meßpunkte mit dem Verlauf von Funktionsgraphen zu vergleichen. Diese Versuche, eine den Ablauf beschreibende Funktion zu finden, liefern kein befriedigendes Ergebnis, da die Exponentialfunktion noch nicht zur Verfügung steht. Deshalb wird schließlich der Rat gegeben, einen Zusammenhang zwischen aufeinanderfolgenden Meßwerten zu suchen. Dazu werden die vier Grundrechenarten angeboten und die Ergebnisse graphisch sichtbar gemacht.

Schon bei mittlerer Meßgenauigkeit läßt sich vermuten, daß das Verhältnis der Temperaturen zu den Zeitpunkten x und $x+d$ für jedes mögliche x nur von d abhängt. Bezeichnet $T(z)$ die Temperatur zu dem beliebigen Zeitpunkt z , so wäre also insbesondere $T(x+d)/T(x)=T(d)/T(0)$ mit $T(0) \neq 0$.

Der Quotient auf der rechten Seite der Gleichung und auch der Vergleich der vorliegenden Messung mit einer Meßreihe bei verschobenem Meßbeginn legt es nahe, eine "normierte" Meßfunktion $N(z):=T(z)/T(0)$ einzuführen. Da die Ausgangsgleichung in x und d "symmetrisch" ist, wird außerdem vorgeschlagen, d

durch die mit x "verwandte" Variable y zu ersetzen. Damit ergibt sich als Ausgangspunkt der innermathematischen Entwicklung die "Funktionalgleichung"

$$(1) \quad N(x+y) = N(x)N(y) \text{ für alle (zulässigen) } x, y \text{ und } N(0) = 1.$$

2.3 Lösungsansätze

Die meisten der bisher bekannten Funktionen lassen sich durch Einsetzen oder durch Überlegungen etwa hinsichtlich des Grades ausschließen. Deshalb wird die Suche nach einem Algorithmus für Näherungslösungen als nächstes Ziel vorgegeben.

Da das Problem neuartig ist, werden zunächst "Spezialisierung" und "Deduktion" als (heuristische) Strategien eingesetzt. Im Programm folgt die Deduktionskette, die mit $N(2x) = (N(x))^2$ beginnt und die über $N(x) > 0$ sowie $N(-x) = 1/N(x)$ zu

$$(2) \quad N(mx) = (N(x))^m \text{ für jedes } m \in \mathbb{Z} \text{ und alle } x$$

führt.

Als eine wichtige Besonderheit des Computereinsatzes (etwa im Vergleich mit dem Lehrbuch) bietet sich nun die vollständige Durchführung von Alternativen an. Hier können zwei Wege gewählt werden: Der erste verwendet n -te Wurzeln, der zweite benötigt nur rationale Näherungswerte.

Falls n -te Wurzeln in irgendeiner Form bekannt sind, läßt sich die obige Deduktion noch einen Schritt weiterführen:

$$(3) \quad N\left(\frac{m}{n}\right) = (N(1))^{m/n} \text{ für jedes } m \in \mathbb{Z} \text{ und jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Damit sind bei Vorgabe eines beliebigen positiven Wertes für $N(1)$ bereits alle Funktionswerte zu rationalen Argumenten festgelegt. Da die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden dicht liegen, können dem Bildschirmausschnitt entsprechende "abgeschlossen" wirkende Teilgraphen zu beliebig wählbaren Basen dargestellt werden.

Dennoch sind durch das bisherige Modell "unnatürliche" Lösungen nicht ausgeschlossen, weil an (mindestens) einer irrationalen Argumentstelle ein beliebiger positiver Funktionswert gewählt werden könnte. Unter den Möglichkeiten zur Verbesserung des Modells ist in der Schule die Monotonieforderung am naheliegendsten. Der algorithmische Ansatz der Intervallschachtelung, der sich dann anbietet, wird mit Intervallhalbierung durchgeführt, schließlich aber verworfen, weil sich wegen der irrationalen, selbst nur näherungsweise berechenbaren Näherungswerte kein "effektiver" Algorithmus ergibt.

Am Anfang des zweiten Weges sind zwar von der gesuchten Lösungsfunktion $N(x)$ bei fest gewähltem $N(1)$ nur die Werte an ganzzahligen Argumentstellen

bekannt. Aber schon die Idee, $N(x)$ anzunähern, legt im Anschluß an die erfolgreiche Deduktion von Funktionswerten den Versuch nahe, rationale Näherungsfunktionen für $N(x)$ zu bestimmen. Ist nämlich eine geeignete Näherung gegeben, so lassen sich mit Hilfe der Funktionalgleichung (1) weitere und eventuell bessere Approximationen gewinnen.

Aus einer unteren Abschätzung

$$(4) \quad 1+ax \leq N(x) \text{ mit } a \neq 0,$$

die sich geometrisch als Existenz einer "Stützgeraden" im Punkt $(0,1)$ deuten läßt, folgt z.B. die obere Abschätzung

$$(5) \quad N(x) = \frac{1}{N(-x)} \leq \frac{1}{1-ax} \text{ für alle } x \text{ mit } ax < 1.$$

Wegen $\frac{1}{1-ax} - (1+ax) = \frac{a^2 x^2}{1-ax}$ stellen $1+ax$ und $(1-ax)^{-1}$ für betragsmäßig

kleine Werte von ax gute Näherungen für $N(x)$ dar.

Das heuristische Ziel Spezialisieren führt zur Entdeckung, daß mit (4) auch $1+z \leq N(\frac{z}{a})$ gilt und daß $E(z) := N(\frac{z}{a})$ wegen $E(x+y) = E(x)E(y)$ ebenfalls die Funktionalgleichung (1) erfüllt. Es genügt also, eine algorithmische Lösung des durch

$$(6) \quad E(x+y) = E(x)E(y) \text{ für alle } x,y \text{ und } 1+u \leq E(u) \text{ für alle } u$$

gegebenen mathematischen Modells zu suchen.

Die mit (5) begonnene Deduktion läßt sich nun interpolierend oder extrapolierend weiterführen. Die erste Methode kommt zu besseren Näherungsfunktionen, indem x in der Ungleichungskette

$$(7) \quad 1+x \leq E(x) \leq \frac{1}{1-x} \text{ für } x < 1$$

durch $\frac{x}{2}$ ersetzt und jeder Term quadriert wird. Durch Fortsetzung des Verfahrens bei jeweiliger Halbierung von x erhält man mit der Abkürzung

$$(8) \quad e_n(x) := (1+2^{-n}x)^{2^n} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

eine Folge von Ungleichungen

$$(9) \quad e_n(x) \leq E(x) \leq \frac{1}{e_n(-x)} \text{ für } x < 2^n$$

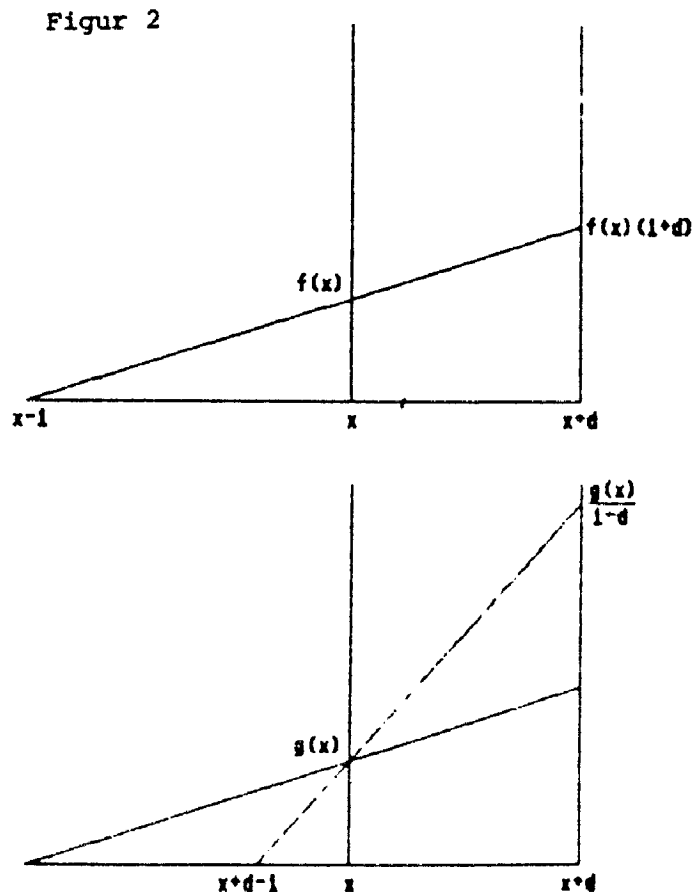
mit einschließenden Funktionen, deren Graphen vermuten lassen, daß für festes x und genügend großes n stets eine Intervallschachtelung vorliegt. Während hier der Nachweis arithmetisch geführt werden müßte, ergibt der zweite Weg zu dieser Intervallschachtelung auch einen "Präbeweis", d.h. einen prä-mathematischen Beweis im Sinne von Z. Semadeni [9] bzw. einen präformalen Beweis nach I. Lakatos [3].

Die Methode wird folgendermaßen motiviert: Von dem bekannten Wert $E(0)=1$ ausgehend sollen in geeigneten, kleinen Schritten Näherungen für den unbekannten Wert $E(y)$ mit $0 < y < 1$ bestimmt werden. Da die rationalen Funktionen in (7) nur für betragsmäßig kleine x gute Näherungen darstellen, wird das Intervall $[0; y]$ durch fortgesetzte Intervallhalbierung in kleine Intervalle der Länge d eingeteilt. Ist dann für einen Intervallanfangspunkt x eine Schachtelung $0 < f(x) \leq E(x) \leq g(x)$ bekannt, so ergibt (7) für den zugehörigen Intervallendpunkt $x+d$ die Schachtelung

$$(10) \quad f(x)(1+d) \leq E(x+d) \leq \frac{g(x)}{1-d}.$$

Um den Übergang von $f(x)$ zu $f(x)(1+d)$ und von $g(x)$ zu $\frac{g(x)}{1-d}$ zu veranschaulichen, wird vom Programm vorgeschlagen (und die Möglichkeit geboten), für frei wählbare positive Werte von $f(x)$ und $g(x)$ eine Gerade durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x+d, f(x)(1+d))$ bzw. $(x, g(x))$ und $(x+d, \frac{g(x)}{1-d})$ zu zeichnen und die Schnittpunkte der beiden Geraden mit der x -Achse zu bestimmen.

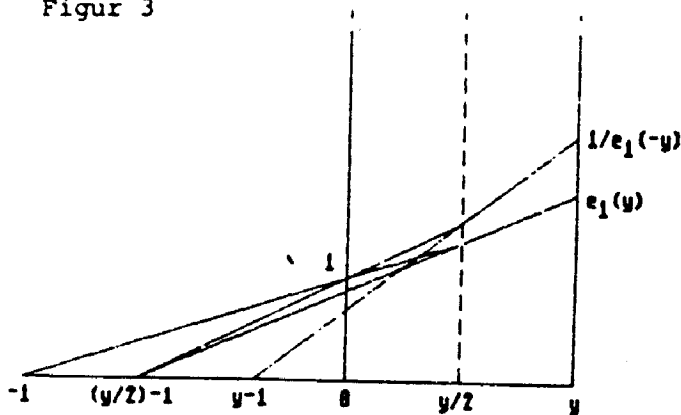
Da diese Schnittpunkte stets den Abstand 1 von den Intervallendpunkten haben - und zwar im ersten Falle vom linken, im zweiten vom rechten (Figur 2)



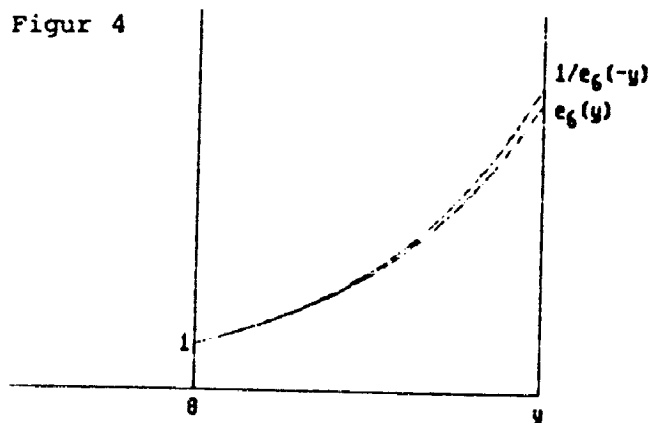
- Ist eine sehr einfache Möglichkeit gefunden, sukzessive Näherungen graphisch zu gewinnen (Figur 3) und dadurch die entsprechenden Veranschaulichungen auf dem Bildschirm auch vollständig zu verstehen. Wegen des Anvisierens der Punkte $(x, f(x))$ bzw. $(x, g(x))$ von der x-Achse her wird diese Konstruktion "Visier" genannt.

Werden jeweils nur die Verbindungsstrecken gezeichnet, so ergeben sich Polygonzüge (Figur 4), von denen bei fortgesetzter Intervallhalbierung mit Hilfe des Visiers zu erkennen ist, daß sie an jeder Stelle des Intervalls $[0; y]$ eine Schachtelung bilden.

Figur 3



Figur 4



Der Nachweis dafür, daß $\left(\frac{1}{e_n(-y)} - e_n(y)\right)_n$ eine (geometrische) Nullfolge darstellt, erfolgt nach dem Ausklammern von $\frac{1}{e_n(-y)}$ mit Hilfe der ebenfalls geometrisch gewonnenen Summenformel für geometrische Summen.

Der Fall einer beliebigen positiven Zahl x läßt sich nach Wahl einer natürlichen Zahl m mit $2^m > x$ durch m -malige Halbierung geometrisch auf die eben betrachtete Situation zurückführen.

Wegen $\frac{x}{2^m} \in]0;1[$ und

$$(11) e_{n+m}(x) = \left(e_n \left(\frac{x}{2^m} \right) \right)^{2^m} \text{ für jedes } n \in \mathbf{N}_0$$

ist auch $\left(\left[e_{n+m}(x); \frac{1}{e_{n+m}(-x)} \right] \right)_n$ eine (geometrische) Intervallschachtelung.

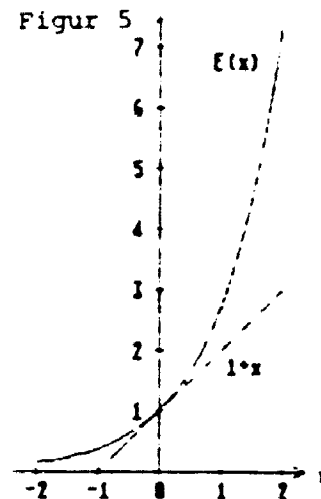
Da das Zentrum dieser Intervallschachtelung nicht von m abhängt, kann die "(natürliche) Exponentialfunktion" für alle $x \in \mathbf{R}$ eindeutig durch

$$(12) \quad \exp x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{2^n} \right)^{2^n}$$

definiert werden.

Mit Hilfe des Visiers läßt sich auch nachweisen, daß die durch (12) eingeführte Funktion dem mathematischen Modell (6) genügt, was nicht selbstverständlich ist, weil die Deduktionskette irreversible Umformungen enthält.

Schließlich folgt noch eine schöne Entdeckung als Vorbereitung der Ableitungseigenschaft: Aufgrund der Visierkonstruktion sieht man unmittelbar, daß die Steigungen der Teilstrecken bei den unteren bzw. oberen Polygonzügen mit den Funktionswerten in den Intervallanfangspunkten bzw. Intervallendpunkten übereinstimmen. Da sich die "Steigungstreppen" also zusammen mit den Polygonzügen dem Graphen der Exponentialfunktion beliebig nähern, kann schon jetzt vermutet werden, daß die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion an jeder Stelle mit dem zugehörigen Funktionswert identisch ist.



3.1 Erster Exkurs: Ableitungsrechnung

Um den Lernenden volles Verstehen zu ermöglichen, werden durch die Elementare Analysis alle Zugänge rigoros vereinfacht und alle Ergebnisse mit Unterstützung der Anschauung genetisch erarbeitet.

Dadurch ist aber die Reihenfolge des Aufbaus nicht festgelegt. Die erste gedruckte Fassung der "Vereinfachten Analysis" [3] beginnt mit einer Präzisierung der reellen Zahlen als Dezimalzahlen und läßt dabei den zugehörigen Grenzwertbegriff entdecken. Obwohl damit eine sichere Grundlage der Schulanalysis geschaffen wurde, empfanden viele Lehrer diesen Einstieg wegen der Verflechtung zweier Probleme als zu schwierig.

Dagegen hat sich der nachfolgend skizzierte, im Vergleich zu [2] und [3] nur leicht modifizierte Zugang über eine "rationale Ableitungsrechnung" im Unter-

richt hervorragend bewährt. Da es hier nicht auf die Motivation und die Durchführung im Detail ankommt, wird nur die formale Entwicklung beschrieben.

3.1.1 Ableitung der Quadratfunktion

Ausgangspunkt ist das "Tangentenproblem", zu dessen Formulierung die allen Schülern intuitiv vertraute Eigenschaft des "Anschmiegens" verwendet wird. Als einfachste nichtlineare Funktion bietet sich die Quadratfunktion mit der Normalparabel als bereits bekanntem Funktionsgraphen zur Untersuchung an.

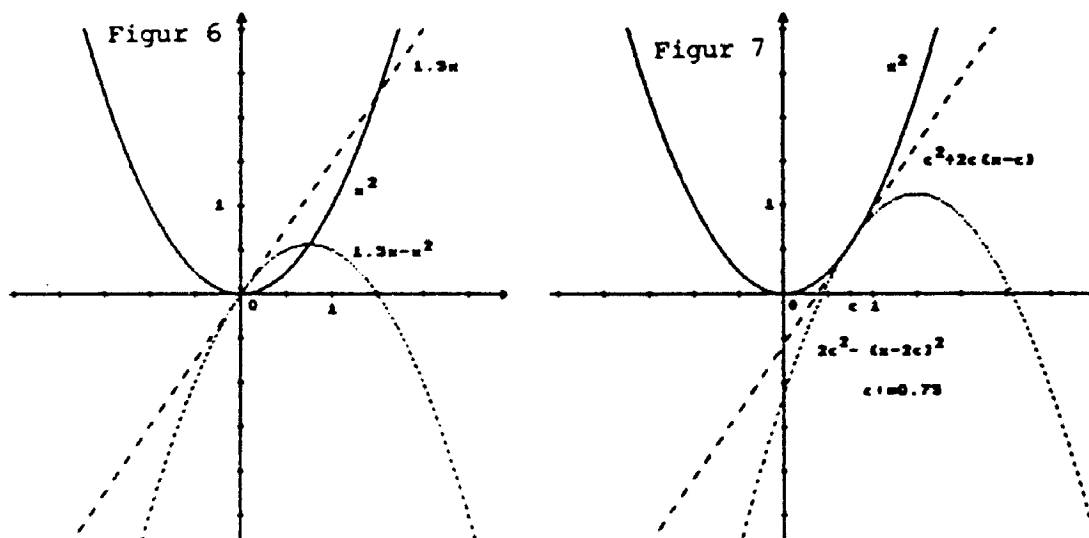
Da wir Differenzenquotienten vermeiden wollen, ist unser erstes Ziel, die mit Mittelstufenalgebra beweisbare Identität

$$(13) \quad x^2 = c^2 + 2c(x-c) + (x-c)^2$$

für festes c geometrisch zu finden.

Zunächst kann die erste Achse als Prototyp einer Tangente von Graph($x \rightarrow x^2$) angesehen werden. Jede andere Gerade durch den Ursprung schneidet die Parabel in einem zweiten Punkt. Aber zu jeder solchen Geraden läßt sich auf einfache Weise diejenige Tangente bestimmen, die parallel zu der gegebenen Sekante ist.

Es wird derjenige Punkt auf der Normalparabel gesucht, für den die Differenz $ax - x^2$ maximal ist, weil die Parallele zu Graph($x \rightarrow ax$) durch diesen Punkt die Normalparabel berührt. Durch "quadratische Ergänzung", die in der Regel aus der Mittelstufe bekannt sein sollte, ergibt sich als Lösung die Berührungspunkt- x -Abszisse $c := \frac{a}{2}$. Damit fällt der Berührungspunkt mit dem Scheitelpunkt der "Differenzparabel" Graph($x \rightarrow ax - x^2$) zusammen (Figur 6).



Da x^2 nicht negativ ist, berührt die Differenzparabel die Gerade Graph($x \rightarrow ax$) nur im Ursprung und liegt sonst unterhalb der Geraden. Nun kann die gesuch-

te Tangente auf drei verschiedenen Wegen dynamisch gewonnen werden (mit mausgesteuerter Computergraphik oder einfach mit zwei OHP-Folien):

i) Die Gerade wird zusammen mit der Differenzparabel parallel zur zweiten Achse verschoben bis der Scheitelpunkt auf der ersten Achse liegt;

ii) Die Gerade und die Differenzparabel werden um den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von Ursprung und Berührungspunkt gedreht bis die Parabel mit der Normalparabel zusammenfällt (Punktspiegelung);

iii) Die in Figur 6 gestrichelten Graphen werden parallel zur Verbindungsstrecke von Ursprung und Berührungspunkt bis zum Berührungspunkt verschoben (Figur 7).

Der erste Weg ergibt unmittelbar die Identität (13) mit $x \rightarrow c^2 + 2c(x-c)$ als "Tangentenfunktion" und $x \rightarrow (x-c)^2$ als "Tangentenabweichung". Die zweite Methode ist interessant, weil dabei sogar die Ausgangssekante als Tangente einer Parabel erscheint, und das dritte Ergebnis erweist sich später als Prototyp des Werkzeugs "Nadel", mit dessen Hilfe mehrere Präbeweise gefunden werden.

Dazu gehört auch der Beweis für die Eindeutigkeit der Tangentensteigung als Konsequenz der Beschränktheit des Koeffizienten von $(x-c)^2$. Da diese Charakterisierung der Tangentenabweichung jetzt noch nicht bekannt sein kann, bietet sich eine einfache arithmetische Überlegung an: Ist m die Steigung einer beliebigen Sekante durch (c, c^2) , so gilt

$$(14) \quad x^2 = c^2 + m(x-c) + \left(1 + \frac{2c-m}{x-c}\right)(x-c)^2 \quad \text{für } x \neq c.$$

d.h. der "Quadratkoeffizient" ist nur im Falle der Tangentensteigung $m = 2c$ beschränkt.

3.1.2 Ableitung der Potenzfunktionen

Die Quadratfunktion wurde so ausführlich behandelt, weil sich die Ableitungen aller übrigen Potenzfunktionen und auch aller reziproken Potenzfunktionen nun außerordentlich schnell und einfach durch "Rekursion" ergeben.

Entscheidend ist der Übergang von x^2 nach x^3 , der formal durch Multiplikation von x^2 mit x erfolgt. Beachtet man, daß zu x in c die Tangentenfunktion $x \rightarrow c+(x-c)$ gehört und daß das Produkt zweier linearer Funktionen eine quadratische Funktion darstellt, deren lineare Approximation bereits bekannt ist, so erhält man durch Multiplikation der Entwicklungen von x und x^2 die Darstellung

$$(15) \quad x^3 = c^3 + 3c^2(x-c) + (x+2c)(x-c)^2.$$

Im Unterricht würde man schrittweise zu höheren Potenzen aufsteigen. Hier

genügt es, den Übergang von x^n nach x^{n+1} zu skizzieren. Aus dem Ansatz

$$(16) \quad x^n = c^n + A_n(c)(x-c) + B_n(x,c)(x-c)^2$$

folgen durch Multiplikation der rechten Seite mit $c + (x-c)$ die "Rekursionsformeln"

$$(17) \quad A_{n+1}(c) := cA_n(c) + c^n, \quad A_1(c) := 1 \text{ und}$$

$$(18) \quad B_{n+1}(x,c) := A_n(c) + xB_n(x,c), \quad B_1(x,c) := 0.$$

Wurde die Beweismethode der "vollständigen Induktion" bereits behandelt, so kann auch die Allgemeingültigkeit (für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) von

$$(19) \quad A_n(c) = nc^{n-1} \text{ und}$$

$$(20) \quad B_n(x,c) = 1c^0x^{n-2} + 2c^1x^{n-3} + \dots + (n-1)c^{n-2}x^0$$

gezeigt werden. Andernfalls lassen sich wenigstens ohne Mühe beliebig viele Einzelfälle herleiten, so daß die dann entstehenden Vermutungen es nahelegen, den Beweis durch vollständige Induktion einzuführen.

Die Rekursionsformeln (17) und (18) bergen noch eine Überraschung: Da die Multiplikation bei dem Übergang von x^n nach x^{n+1} umkehrbar ist, kann auch die Rekursion rückwärts durchlaufen werden. Dabei ergibt sich zunächst

$$A_0(c)=0, B_0(x,c)=0 \text{ und } A_{-1}(c) = -\frac{1}{c^2}, B_{-1}(x,c) = \frac{1}{c^2x}, \text{ so daß}$$

$$(21) \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2}(x-c) + \frac{1}{c^2x}(x-c)^2 \text{ für alle } x \text{ und } c \text{ mit } cx \neq 0 \text{ gilt.}$$

Diese Rekursion ließe sich ähnlich wie oben beliebig fortsetzen. Da in der Berechnung der Ableitung von x^{n+1} aber bereits die Grundidee der "Multiplikationsregel" steckt, kann man nun die Chance nutzen und auch die "Kettenregel" vorbereiten, indem man (21) einfach in (16) mit (19) einsetzt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^n} &= \frac{1}{c^n} + \frac{n}{c^{n-1}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{c} \right) + B_n\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{c} \right)^2 \\ &= \frac{1}{c^n} - \frac{n}{c^{n+1}}(x-c) + \frac{1}{c^2x} \left(\frac{n}{c^{n-1}} + \frac{1}{x} B_n\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{c}\right) \right) (x-c)^2. \end{aligned}$$

Wegen (18) folgt dann

$$(22) \quad x^{-n} = c^{-n} - nc^{-n-1}(x-c) + \frac{1}{c^2x} B_{n+1}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{c}\right) (x-c)^2$$

für alle x und c mit $cx \neq 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als Spezialfall der "Umkehrregel" läßt sich aus (16) mit (19) sogar die lineare Approximation für die Wurzelfunktionen durch einfaches Umformen gewinnen, wenn man das Irrationalitätsproblem zunächst zurückstellt.

Da die Potenzfunktion $x \rightarrow x^n$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ für positive x monoton wächst, kann die Umkehrfunktion $X \rightarrow X^{\frac{1}{n}}$ definiert werden, wobei X vorläufig nur Werte annehmen darf, die n -te Potenzen von positiven rationalen Zahlen sind.

Ersetzt man in (16) x durch $X^{\frac{1}{n}}$ und c durch $C^{\frac{1}{n}}$, so folgt

$$X = C + n C^{1 - \frac{1}{n}} (X^{\frac{1}{n}} - C^{\frac{1}{n}}) + B_n(X^{\frac{1}{n}}, C^{\frac{1}{n}}) \left(\frac{X^{\frac{1}{n}} - C^{\frac{1}{n}}}{X - C} \right)^{-2} (X - C)^2.$$

Mit der Abkürzung $D_n(x, c)$ für die "Potenzdifferenzenquotienten" $\frac{x^n - c^n}{x - c}$, $x \neq c$, gilt $x^n = c^n + D_n(x, c)(x - c)$, und eine zu (18) analoge Rekursionsformel ergibt

$$(23) \quad D_n(x, c) = x^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + c^{n-1}.$$

Damit erhält man

$$(24) \quad X^{\frac{1}{n}} = C^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} C^{\frac{1}{n}-1} (X - C) - \frac{1}{n} C^{\frac{1}{n}-1} B_n(X^{\frac{1}{n}}, C^{\frac{1}{n}}) (D_n(X^{\frac{1}{n}}, C^{\frac{1}{n}}))^{-2} (X - C)^2$$

für alle X und C , die n -te Potenzen von positiven rationalen Zahlen sind.

3.1.3 Elementare Differenzierbarkeit

Die zu den obigen Herleitungen gehörenden Veranschaulichungen der Tangentenfunktion und der Tangentenabweichung mit Hilfe von Graphikcomputern zeigen, daß zumindest im Bildschirmbereich die Eindeutigkeit der Tangentenfunktion mit der Beschränktheit des Quadratkoeffizienten zusammenhängt. Für $n > 2$ und für $n < 0$ sind aber die Quadratkoeffizienten $B_n(x, c)$ bzw.

$$\frac{1}{c^2 x} B_{n+1}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{c}\right) \text{ über } \mathbb{Q} \text{ bzw. } \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ nicht beschränkt.}$$

Um zu einer sinnvollen Definition der Ableitung zu kommen, ist es deshalb zweckmäßig, dem Vorgehen in den meisten Anwendungsbereichen zu folgen und Funktionen nicht auf ihrem vollen Definitionsbereich sondern auf beliebigen (oder geeigneten) abgeschlossenen Intervallen aus dem Definitionsbereich zu betrachten.

Eine Funktion f , die durch die Zuordnung $x \rightarrow f(x)$ gegeben ist und für die x das Intervall $[a; b]$ durchläuft, wird durch $f := (x \rightarrow f(x), [a; b])$ abgekürzt. Die obigen dreimal unendlich vielen Beispiele legen nun die folgende Definition der entdeckten Funktioneneigenschaft nahe:

Definition.

Die Funktion $(x \rightarrow f(x), [a; b])$ heißt in $c \in]a; b[$ elementar differenzierbar mit der Ableitung $f'(c)$ genau dann, wenn

$$(25) \quad f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + B(x, c)(x - c)^2$$

mit einer beschränkten Funktion $(x \rightarrow B(x, c), [a; b])$ für alle $x \in [a; b]$ gilt.

Anmerkungen:

Da viele Menschen mit dem Begriffspaar gutartig/bösartig sehr unangenehme Assoziationen verbinden, werden in der Elementaren Analysis die von H. Karcher eingeführten Begriffe "gutartig differenzierbar" bzw. "gutartig" durch "elementar differenzierbar" bzw. "elementar stetig" ersetzt.

Außerdem benützen wir im Anschluß an K. Arzt und K. Mütz [1] anstelle der von Karcher verwendeten Betragsungleichung $|f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)| \leq K(x-c)^2$ eine Gleichung, mit der man nicht nur besser rechnen kann, sondern die es auch ermöglicht, alle Existenzquantoren aus der Definition zu eliminieren, weil der Term $B(x,c)$ durch die übrigen Teile der Gleichung festgelegt ist und weil die Beschränktheit schon früher behandelt wird.

Ist K eine obere Schranke von $(x \rightarrow |B(x,c)|, [a;b])$ ("Koeffizientenschranke") und wird $P_{\pm K}(x) := f(c) + f'(c)(x-c) \pm K(x-c)^2$ gesetzt, so folgt

$$(26) \quad P_{-K}(x) \leq f(x) \leq P_{+K}(x) \text{ für alle } x \in [a;b];$$

d.h. Graph(f) verläuft zusammen mit der Geraden Graph($x \rightarrow f(c) + f'(c)(x-c)$) zwischen zwei punktsymmetrischen Parabeln, die sich im Punkt $(c, f(c))$ berühren.

Die Veranschaulichung dieses Sachverhalts ergibt den allgemeinen Fall der Figur "Nadel", die bereits bei der Quadratfunktion in Figur 7 auftrat. Eine Besonderheit des geometrischen Stranges der Elementaren Analysis ist die Verwendung solcher Figuren als Werkzeuge bei der Entdeckung von Ergebnissen in Form von Präbeweisen.

Mit dem Werkzeug Nadel wird unter anderem die Eindeutigkeit der Ableitung, der Zusammenhang zwischen Tangentensteigung und Sekantensteigung, die Charakterisierung der Ableitung von monotonen Funktionen und das Nullstellenkriterium für innere Extremwertstellen gewonnen.

Da diese Herleitungen aber wesentlich von der Dynamik der (mausgesteuerten) Computergraphik geprägt sind, lassen sie sich hier nicht angemessen wiedergeben. Deshalb soll als Abschluß dieses Exkurses nur noch der "Kalkül" für elementar differenzierbare Funktionen entwickelt werden.

Die vorbereitende Untersuchung von Funktionen in der Elementaren Analysis liefert bereits den Kalkül für beschränkte Funktionen: Die Summe, das Produkt und die Verkettung von beschränkten Funktionen ergeben wieder beschränkte Funktionen.

Sind $(x \rightarrow f(x), [a;b])$, $(x \rightarrow g(x), [a;b])$ und $(X \rightarrow h(X), [A;B])$ elementar differenzierbare Funktionen und gilt $g(x) \in [A;B]$ für alle $x \in [a;b]$, so lassen sich $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ und $h(g(x))$ durch die entsprechenden Verknüpfungen der jeweiligen Entwicklungen bilden. Da in die Quadratkoeffizienten, deren explizite Form jetzt unwichtig ist, nur beschränkte Terme eingehen, sind sie selbst be-

schränkt. Damit ist die Kalküleigenschaft der elementar differenzierbaren Funktionen schon gesichert.

Die Ableitungen von Summe und Produkt können dann unmittelbar als Koeffizienten der Argumentdifferenz abgelesen werden:

$$(27) \quad (f+g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

$$(28) \quad (f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

Die lineare Approximation der Verkettung folgt nach einer Umformung:

$$h(g(c)) + h'(g(c))(g(x)-g(c)) = h(g(c)) + h'(g(c))g'(c)(x-c) + h'(g(c))B_g(x,c)(x-c)^2,$$

so daß

$$(29) \quad (h \circ g)'(c) = h'(g(c))g'(c)$$

gilt.

3.2 Ableitung der Exponentialfunktion

Die elementare Differenzierbarkeit der (natürlichen) Exponentialfunktion ergibt sich bereits aus dem mathematischen Modell (6), also insbesondere ohne eine explizite Definition, die in jedem Falle Grenzwertbildung erfordert.

Zunächst gilt $1+u \leq E(u)$ für alle u . Unter Verwendung von (7) erhält man eine sehr gute obere Abschätzung durch Unterscheidung von drei Fällen:

$$\text{Für } u \leq 0 \text{ und } d \geq 0 \text{ gilt } E(u) \leq \frac{1}{1-u} = 1+u + \frac{u^2}{1-u} \leq 1+u + E(d)u^2.$$

$$\text{aus } E(u) \leq \frac{1}{1-u} = \frac{1+u}{1-u^2} \text{ folgt } E(u) \leq 1+u + E(u)u^2 \leq 1+u + E(d)u^2 \text{ für } 0 \leq u < 1, u \leq d,$$

und im Falle $1 \leq u, u \leq d$ führt das monotone Wachsen von $x \rightarrow E(x)$ zu derselben Ungleichungskette.

Zusammengefaßt ergibt sich also $0 \leq E(u) - 1 - u \leq E(d)u^2$ für jedes $d \geq 0$ und alle u mit $u \leq d$. Setzt man hier $u := x-c, d := b-c$ und multipliziert mit $E(c)$, so erhält man schließlich

$$(30) \quad 0 \leq E(x) - E(c) - E(c)(x-c) \leq E(b)(x-c)^2 \text{ für alle } x, c \text{ mit } x > b \text{ und } c > b,$$

d.h. jede Lösung $E(x)$ von (6) ist für alle c elementar differenzierbar mit der Ableitung $E'(c) = E(c)$.

4.1 Zweiter Exkurs: Der Hauptsatz

4.1.1 Eigenschaften der Ableitungsfunktion

Da man zu allen im Unterricht vorkommenden Beispielen von elementar differenzierbaren Funktionen Koeffizientenschranken K finden kann, die von dem Argument c unabhängig sind, und da sich $2K$ als "Krümmungsschranke" deuten läßt, liegt die folgende Definition der "globalen" Differenzierbarkeit nahe.

Definition.

Die Funktion $(x \rightarrow f(x), [a; b])$ heißt **elementar differenzierbar** (oder gutartig differenzierbar) genau dann, wenn es eine Funktion $(y \rightarrow f'(y), [a; b])$ gibt, so daß

$$(31) \quad f(x) = f(y) + f'(y)(x-y) + B(x,y)(x-y)^2$$

mit einer beschränkten Funktion $((x,y) \rightarrow B(x,y), [a; b]^2)$ für alle $x, y \in [a; b]$ gilt.

Die Übertragung des Kalküls und die algorithmische Bestimmung der Extremwertstellen, die Nullstellen der Ableitungsfunktion sind, erfordern eine möglichst genaue Charakterisierung aller Ableitungsfunktionen.

Aus (31) ergibt sich durch Vertauschen von x und y sowie durch Subtraktion und Kürzen die Gleichung

$$(32) \quad f'(x) = f'(y) + (B(x,y) + B(y,x))(x-y) \text{ für alle } x, y \in [a; b].$$

Der beschränkte Faktor von $(x-y)$ motiviert die Einführung der folgenden Funktioneneigenschaft, die sich mit Hilfe der Integralrechnung tatsächlich als vollständige Beschreibung aller Ableitungsfunktionen von elementar differenzierbaren Funktionen erweist:

Definition.

Die Funktion $(x \rightarrow g(x), [a; b])$ heißt **elementar stetig** (oder Lipschitz-stetig oder gutartig) genau dann, wenn

$$(33) \quad g(x) = g(y) + D(x,y)(x-y)$$

mit einer beschränkten Funktion $((x,y) \rightarrow D(x,y), [a; b]^2)$ für alle $x, y \in [a; b]$ gilt.

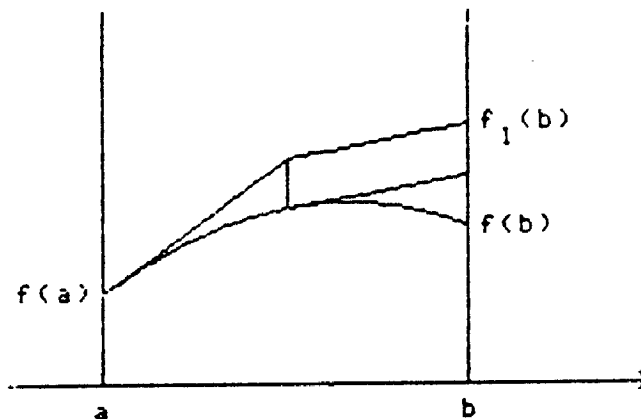
Ist L eine obere Schranke von $((x,y) \rightarrow |D(x,y)|, [a; b]^2)$, so läßt sich $\text{Graph}(g)$ zwischen zwei Halbgeradenpaaren mit den Steigungen L und $-L$ einschließen. Diese Veranschaulichung liefert das Werkzeug "Schiere", mit dessen Hilfe unter anderem unmittelbar die Beschränktheit von elementar stetigen Funktionen sichtbar wird. Aus (31) folgt dann wegen der Beschränktheit von f' auch, daß jede elementar differenzierbare Funktion elementar stetig ist.

4.1.2 Der Rekonstruktionssatz

Für Kurvendiskussionen und eine Reihe von weiteren Anwendungen der Ableitungsrechnung sind Schlüsse von f' auf f notwendig. Am günstigsten wäre es, wenn man die Funktion f nach Vorgabe eines Anfangswerts $f(a)$ aus ihrer Ableitungsfunktion f' auf einfache Weise rekonstruieren könnte.

Bei elementar differenzierbaren Funktionen ist dieses sogar "genetisch" mit einem Präbeweis möglich. Zunächst erhält man durch Einteilung des Intervalls $[a; b]$ in m gleichlange Teilintervalle und durch Parallelverschiebung der Steigdreiecke über den einzelnen Teilintervallen einen Polygonzug, der $\text{Graph}(f)$ annähert.

Die Endpunktordinate $f_m(b)$ des Polygonzugs ist also einerseits $f(a)$ vermehrt um die Summe der m Steigdreieckshöhen, und andererseits zeigt eine naheliegende Parallelgrammkonstruktion, daß $f(b) - f_m(b)$ als Summe der Tangentenabweichungen über den m Teilintervallen geschrieben werden kann (Figur 8).



Jede Tangentenabweichung ist aber das Produkt des Quadrats der Teilintervalllänge und eines Faktors, dessen Betrag sich nach oben durch die Koeffizientenschranke K abschätzen läßt. Damit gilt $|f(b) - f_m(b)| \leq K(b-a)^2 \frac{1}{m}$, und man hat den folgenden, außerordentlich nützlichen Satz gewonnen:

Rekonstruktionssatz.

Ist $f := (x \rightarrow f(x), [a; b])$ elementar differenzierbar mit der Ableitung f' und mit der Koeffizientenschranke K , so gilt

$$(34) \quad \left| f(b) - f(a) - \sum_{k=0}^{m-1} f' \left(a + k \frac{b-a}{m} \right) \frac{b-a}{m} \right| \leq K(b-a)^2 \frac{1}{m} \quad \text{für jedes } m \in \mathbb{N}.$$

Dieser Satz stellt bereits die *grenzwertfreie und integralfreie Version des Hauptsatzes der Ableitungs- und Integralrechnung* in der Elementaren Analysis dar, denn sobald ein (verschärfter) Grenzwertbegriff zur Verfügung steht, geht die Ungleichung (34) in die Gleichung

$$(35) \quad \lim \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} f' \left(a + k \frac{b-a}{2^n} \right) \frac{b-a}{2^n} \right)_n = f(b) - f(a)$$

über, und nach Einführung des Integrals erhält man daraus praktisch sofort

$$(36) \quad \int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Ebenso wichtig ist eine zweite Deutung des Rekonstruktionssatzes im Zusammenhang mit dem *Mittelwertsatz der Cauchy-Analysis* und mit den "zentralen Sätzen" der bisherigen Schulanalysis: Division von (34) durch $b-a$ ergibt

$$(37) \quad \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f' \left(a+k \frac{b-a}{m} \right) \right| \leq K(b-a) \frac{1}{m} .$$

d.h. der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ läßt sich beliebig genau durch Ableitungen an bekannten Stellen approximieren, während im Mittelwertsatz zwar eine Gleichung aber eine unbekannte Stelle auftritt.

Mit Hilfe der Archimedischen Eigenschaft der rationalen Zahlen folgt aus (37) sofort der wichtige "Schrankensatz", der im Unterricht den Mittelwertsatz bzw. die meistens ebenfalls unbewiesenen zentralen Sätze - etwa den "Monotoniesatz" - ersetzt:

Schrankensatz.

Ist $(x \rightarrow f(x), [a; b])$ elementar differenzierbar und gilt $s \leq f'(u) \leq S$ für alle $u \in [a; b]$, so folgt

$$(38) \quad s \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq S \text{ für alle } x, y \in [a; b] \text{ mit } x \neq y.$$

Insbesondere ist f monoton wachsend bzw. monoton fallend bzw. konstant, wenn $f'(u) \geq 0$ bzw. $f'(u) \leq 0$ bzw. $f'(u) = 0$ für alle $u \in [a; b]$ gilt.

4.2 Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion

Sind $(x \rightarrow g_i(x), [a; b])$, $i=1, 2$, elementar differenzierbare Funktionen mit $g_1'(x) \leq g_2'(x)$ für alle $x \in [a; b]$, so ergibt der Schrankensatz, daß $g_1(x) \leq g_2(x)$ bzw. $g_1(x) \geq g_2(x)$ für alle $x \in [a; b]$ gilt, wenn $g_1(a) = g_2(a)$ bzw. $g_1(b) = g_2(b)$ ist.

Ausgehend von (30) mit $c=0$ und $b \geq 0$ kann man schon nach wenigen Anwendungen der obigen Folgerung vermuten, daß man $g_1(x) := E(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$ und

$g_2(x) := \frac{E(b)}{(n+1)!} x^{n+1}$ bzw. $g_1(x) := 0$ und $g_2(x)$ wie vorher $g_1(x)$ setzen muß, um

durch sukzessive Anwendung des ersten Schlußtyps mit $a=0$ und $b > 0$ sowie des zweiten Typs mit $a < 0$ und $b=0$ die folgende "Potenzreihendarstellung" für die natürliche Exponentialfunktion als Lösung des Modells (6) zu erhalten:

$$(39) \quad 0 \leq (\text{sign } x)^{n+1} \left(E(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right) \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} E(\max(0, x))$$

für jedes $x \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Natürlich lassen sich diese grenzwertfrei gewonnenen Näherungspolynome auch sehr gut mit einem Graphikcomputer darstellen.

5. Dritter Exkurs: Grenzwerte

Durch die Zurückstellung der Grenzwerttheorie ist es in der Elementaren Analysis nicht mehr möglich, die natürliche Exponentialfunktion frühzeitig durch (12) zu definieren. Dafür kann nun unter zwei gleichwertigen Zugängen gewählt werden, wobei der erste stärker geometrisch und der zweite mehr algorithmisch orientiert ist.

In jedem Falle sollte die Präzisierung der reellen Zahlen und damit verbunden die Lösung des Grenzwertproblems wegen der zahlreichen, gut motivierenden Anlässe bei dem bisherigen Aufbau nicht weiter aufgeschoben werden. Allerdings kann an dieser Stelle das Vorgehen in der Elementaren Analysis, das ebenfalls stark von dem bisherigen abweicht, nur skizziert werden.

Wie in der Mittelstufe bereits vorbereitet und wie in allen Kulturländern üblich wird als Modell für die reellen Zahlen die durch den Meßprozeß gewonnene Menge der Dezimalzahlen (später ohne Neunerperiode) mit ihrer natürlichen Anordnung gewählt.

Dann wird die Gleichheit von rationalen Zahlen und periodischen Dezimalzahlen geklärt und dabei der grundlegende Begriff der "geometrischen Nullfolge" gefunden sowie mit seiner Hilfe der Grenzwert und die geometrische Konvergenz von Folgen eingeführt.

Bei dem Versuch, die Verknüpfungen der reellen Zahlen zu beschreiben, werden durch gliedweise Verknüpfung der Näherungsbruchfolgen die "(geometrischen) Fundamentalfolgen" entdeckt, die - wesentlich einfacher als Cauchy-Folgen - bereits dadurch definiert sind, daß die Folge der Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine geometrische Nullfolge darstellt.

Die Menge der Fundamentalfolgen ist in bezug auf gliedweise Addition und Multiplikation abgeschlossen. Außerdem ist jede Fundamentalfolge Mittelpunktfolge einer bestimmten geometrischen Intervallschachtelung. Damit kann jeder Fundamentalfolge sowohl geometrisch als auch arithmetisch-konstruktiv durch Sammeln der festbleibenden Ziffern einer Endpunktfolge der zugehörigen Intervallschachtelung in eindeutiger Weise eine reelle Zahl zugeordnet werden.

Diese Zuordnung bildet sehr anschaulich die wichtige "Limesabbildung", mit deren Hilfe sich dann auch die Verknüpfungen der reellen Zahlen klären und die Körpereigenschaften beweisen lassen.

Vor allem aber ist damit der für Anwendungen und Algorithmen außerordentlich nützliche "Vollständigkeitsatz" vorbereitet, der besagt, daß jede reelle Fundamentalfolge geometrisch konvergent ist.

Nun können alle nichtrationalen Standardfunktionen algorithmisch definiert

werden, und die noch fehlenden wichtige Sätze der Ableitungstheorie lassen sich mit Präbeweisen gewinnen.

Die stärkste Vereinfachung gegenüber der herkömmlichen Analysis bildet die Einführung des Integrals für elementar stetige Funktionen. Vom Flächeninhaltsproblem geleitet ergeben sich Folgen von Obersummen bzw. Untersummen, indem das Ausgangsintervall fortgesetzt halbiert und geometrisch naheliegende Schranken der Funktionswerte über jedem der Teilintervalle als Faktor bzw. als Rechteckshöhe gewählt werden.

Man kann unmittelbar erkennen, daß diese beiden Folgen die Endpunktfolgen einer geometrischen Intervallschachtelung darstellen, deren Zentrum das Integral der Funktion definiert. Da das Integral zugleich Grenzwert jeder "Zwischensumme" ist, ergibt sich wie schon erwähnt durch Umformulierung des Rekonstruktionssatzes sofort der Hauptsatz der Ableitungs- und Integralrechnung als Krönung der Elementaren Analysis.

Literatur

- [1] Arzt, K. und Mütz, K.: Ein grenzwertfreier Zugang zur Analysis. In: Der Mathematikunterricht, 22 (1976), 47-63.
- [2] Karcher, H.: Analysis auf der Schule. In: Didaktik der Mathematik 1 (1973), 46-69.
- [3] Lakatos, I.: What does a mathematical proof prove? In: Mathematics, Science and Epistemology; Phil. papers vol. 2. Cambridge 1978.
- [4] Möller, H.: Vereinfachte Analysis. Skriptum, Münster 1980/81.
- [5] Möller, H.: Elementare Analysis mit LOGO. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1986. Bad Salzdetfurth 1986, 200-203.
- [6] Möller, H. und Maaß, J.: Der Mikrocomputereinsatz im Analysisunterricht. In: mathematica didactica 10 (1987), 199-219, und 11 (1988), 11-18.
- [7] Möller, H.: Die Winkelfunktionen im geometrischen Strang der Elementaren Analysis. In: H. Kautschitsch, W. Metzler (Hrsg.): Medien zur Veranschaulichung von Mathematik. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Wien, Stuttgart 1987, 313-322.
- [8] Müller, W.: Analysis mit dehnungsbeschränkten und gutartig differenzierbaren Funktionen nach H. Karcher (Lipschitz-Analysis). Paderborn 1986.
- [9] Semadeni, Z.: The concept of premathematics as a theoretical background for primary mathematics teaching. Manuskript aus dem Institut für Mathematik der polnischen Akademie der Wissenschaften 1976.